BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* **2008**

ГЁЛЬДЕРОВА НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТАНДАРТНЫМ УСЛОВИЕМ РОСТА

С.Т.ГУСЕЙНОВ

Институт Прикладной Математики, БГУ

В работе рассматриваются решения эллиптических уравнений с нестандартным условием роста. Кроме того, доказывается теорема об ограниченности решений. Далее, доказывается внутренняя гладкость решений уравнения в фиксированной точке при условии, что переменный показатель в этой точке обладает логарифмическим модулем непрерывности.

§1. Введение

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства R^n, $n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \tag{1}$$

где $\|a_{ij}(x)\|$ – действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами; $p(x)$-измеримая в D функция и $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty$.

Предположим, что относительно коэффициентов оператора L выполнены условия

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2, \quad \mu \in (0,1]. \tag{2}$$

Для определения решения введём два класса функций, связанных с показателем $p(x)$:

$$V_{loc}(D) = \{u(x) : u \in W^1_{1,loc}(D), \ |\nabla u|^{p(x)} \in L_{loc}(D)\}$$

и

$$V_O(D) = \{\varphi(x) : \varphi \in V_{loc}(D), \quad \varphi = 0 \quad \text{в окрестности } \partial D\}.$$

Функция $u \in V_{loc}(D)$ называется решением уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0 \tag{3}$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in V_0(D)$.

Для равномерно эллиптических уравнений дивергентной структуры E. De. Giorgi [1] установил, что всякое слабое решение является гёльдеровым в каждой строго внутренней подобласти рассматриваемой области. Другое доказательство этого факта можно найти в [2-3].

Для линейных уравнений случай $p = \mathrm{const}$ рассмотрен в [4] и [5]. Интерес к уравнениям с переменным показателем $p(x)$ возникает не только при изучении вариационных задач с интегрантом вида $|\nabla u|^{p(x)}$ [6], но и при исследовании различных задач математической физики (задача о термисторе, нелинейная система Стокса и др. [7]).

Известно, насколько важную роль играет вопрос о плотности гладких функций в пространстве решений. В работе $[8]$ показано, что если

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{const}{\ln|x-y|^{-1}} \text{ при } |x-y| < \frac{1}{2}, \tag{4}$$

то

$$\forall\, u \in V_{loc}(D) \quad \exists u_j \in C^{\infty}(D) : \lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W_1^1(D)} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{D'} |\nabla u_j|^P dx = \int_{D'} |\nabla u|^P dx$$

в любой подобласти $D' \Subset D$.

Условие (4) является точным для справедливости этого утверждения. Таким образом, при выполнении условия (4) в интегральном тождество (3) можно ограничиться пробными функциями $\varphi \in C_0^{\infty}(D)$.

При выполнении условия (4) в $[9]$ и $[10]$ доказана внутренняя априорная оценка нормы Гёльдера решений уравнения (1).

Уравнение с кусочно-непрерывным показателем $p(x)$рассмотрено в $[10]$. Здесь гёльдеровость решений доказана в предположениях, что область D разделена гиперплоскостью $\sum$ на две части, в каждой из которых $p(x)$ удовлетворяет условию (4) и скачок $p(x)$при переходе через $\sum$ не обращается в нуль. Отметим, что в этом случае гладкие функции плотны в $V_{loc}(D)$ в смысле соотношения (5).

В настоящей работе изучается внутренняя гладкость решений уравнения (1) в фиксированной точке $x_0 \in D$. Предполагается, что в этой точке показатель $p(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \frac{const}{\ln|x-x_0|^{-1}} \text{ при } |x-x_0| < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Поскольку на характер разрыва функции $p(x)$при $x \neq x_0$ не накладывается никакое ограничение, то свойство (5), вообще говоря, не выполнено.

Поэтому наряду с решением, определенным выше, которое будем называть V-решением, естественно определить другое решение. Для этого введём класс функций $H_{loc}(D)$ следующим образам: $u \in H_{loc}(D)$,если выполнено (5) в любой подобласти $D' \Subset D$. Функция $u \in H_{loc}(D)$ называется H-решением уравнения (1),если интегральное тождество выполнено для любой пробной функции $\varphi \in C_0^{\infty}(D)$.

Обозначим через $B_R = B_R^{x_0} = \{x : |x - x_0| < R\}$ открытый шар с центром в $x_0 \in R^n$, радиуса $R > 0$, $|E| - n-$мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset R^n$ и

$$\oint_E f dx = \frac{1}{|E|} \int_E f dx .$$

§2. Локальная ограниченность решений

Доказательство всех утверждений настоящей работы справедливо для обеих типов решений уравнения (1). Это связано со следующим свойством локальности функций $u \in V_{ioc}(D)$ $(u \in H_{loc}(D))$ в малой окрестности точки x_0: если $\varphi \in C_0^{\infty}(B_R)$, то $u \cdot \varphi \in V_0(D)$ $(u \cdot \varphi \in H_0(D))$. Действительно, достаточно проверить, что $|u|^p \in L(B_R)$ для малого R. Очевидно,

$$\int_{B_R} |\nabla u|^{\sigma} dx \le |B_R| + \int_{B_R} |\nabla u|^p dx, \quad \sigma = \min_{B_R} p(x).$$

Это вместе с теоремой вложения влечет интегрируемость $u(x)$ в B_R со степенью $k\sigma$. Так как $k\sigma > p$ в B_R для малых R, то $|u|^p \in L(B_R)$.

Дальнейшие рассуждения основаны на интегральных оценках решений в шаре B_R, таком, что $B_{4R} \subset D$ и в B_{4R} выполнено свойство локальности.

В последующем будем применять теорему вложения Соболева в виде

$$\left(\oint_{B_R} |\varphi|^{kq} dx \right)^{1/k} \le CR^q \oint_{B_R} |\nabla \varphi|^q dx, \quad q \ge 1, \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(B_R). \tag{7}$$

Всюду далее используются обозначения

$$s = \sup_{B_{4R}} p(x), \quad \bar{s} = \inf_{B_{4R}} p(x), \tag{8}$$

а в следующей лемме полагается

$$w(x) = \max\{u(x) + 1, 1\}.$$

Кроме того, для неотрицательных функций будет использоваться неравенство Юнга

$$f.g^{\sigma} \le f + f.g^p \qquad 0 < \sigma \le p . \tag{9}$$

Лемма 1. Если $R \le \rho < r \le 3R$, то для $\gamma \ge 0$ справедливо неравенство

$$\left(\oint_{B_\rho} w^{-k\gamma+p} dx \right)^{1/k} \le c(n,p,\mu)(1+\gamma)^s \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^s \int_{B_r} w^{\gamma+p} dx . \qquad (10)$$

Доказательство. Выберем $\eta \in C_0^\infty(B_r)$, $0 \le \eta \le 1$ и положим для $\beta \ge 1$

$$h(\xi) = h_j(\xi) = \begin{cases} \xi^\beta & при \quad \xi \in [0, j], \\ j^\beta + \beta j^{\beta-1}(\xi - j) & при \quad \xi \ge j; \end{cases}$$

$$H(\xi) = \int_1^\xi |h'\zeta|^{\bar{s}} d\zeta .$$

Рассмотрим пробную функцию $\varphi = H(w)\eta^s$. В силу (3) и (2):

$$\int_{B_r} h'(w)^{\bar{s}} |\nabla w|^p \eta^s dx \le c(\mu,p) \int_{B_r} H(w)|\nabla w|^{p-1} |\nabla \eta| \eta^{s-1} dx .$$

Из неравенства Юнга

$$H(w)|\nabla w|^{p-1} |\nabla \eta| \eta^{s-1} \le \varepsilon |h'(w)|^p |\nabla w|^1 \eta^s + C(\varepsilon)|h'(w)|^{\bar{s}(1-p)} H^p(w)|\nabla \eta|^p ,$$

после соответствующего выбора $\varepsilon > 0$, находим

$$\int_{Br} |h'(w)|^{\bar{s}} |\nabla w|^p \eta^S dx \le C(n,\mu,p) \int_{B_r} |h'(w)|^{\bar{s}(1-p)} H^p(w)|\nabla \eta|^p dx .$$

Отсюда и из неравенства (9), в котором $g = |\nabla w|$, $f = |h'|^{\bar{s}} \eta^s$ и $\sigma = \bar{s}$, будем иметь

$$\int_{B_r} |h'(w)|^{\bar{s}} |\nabla w|^{\bar{s}} \eta^s dx \le \int_{B_r} |h'(w)|^{\bar{s}} dx + C(n,\mu,p) \int_{B_r} |h'(w)|^{\bar{s}(1-p)} H^p(w)|\nabla \eta|^p dx$$

или, так как $\eta^s \le \eta^{s/\bar{s}}$,

$$\oint_{B_r} \left|\nabla\left(h(w)\eta^s\right)\right|^{\bar{s}} dx \le c(n,\mu,p)\left[\oint_{B_r} |h(w)|^{\bar{s}} |\nabla \eta|^{\bar{s}} dx + \oint_{B_r} |h'(w)|^{\bar{s}} \left(1 + |h'(w)|^{-\bar{S}p} H^p(w)|\nabla \eta|^p \right) dx \right]$$

.

Применим к левой части теорему вложения (7). После перехода к пределу при $j \to \infty$ и замены нижнего предела интегрирования в определении функции $H(\xi)$ на нуль, придем к неравенству

$$\left(\oint_{B_r} \left(w^\beta \eta^s \right)^{k\bar{s}} dx \right)^{1/k} \le C(n,\mu,p)(1+\beta)^s \left[\oint_{B_r} \left(w^\beta |\nabla \eta|^{\bar{s}} dx + \oint_{B_r} \left(w^{(\beta-1)\bar{s}} + w^{(\beta-1)s+p} \right) |\nabla \eta|^p \right) dx \right]$$

.

Выбирая $\eta = 1$ в B_ρ, $|\nabla \eta| \le \dfrac{cr}{R(r-\rho)}$, получаем оценку

$$\left(\int_{B_\rho} w^{k\beta\bar{s}}dx\right)^{1/k} \le C(n,\mu,p)(1+\beta)^{\bar{s}}\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{s} \oint_{B_r} w^{(\beta-1)\bar{s}+p}dx, \qquad (11)$$

поскольку $w \ge 1$ и $w^{\beta\bar{s}} \le C(p)w^{(\beta-1)\bar{s}+p}$ в B_r согласно логарифмическому условию (5).

Далее, так как $k(\beta-1)^{\bar{s}} + p(x) \le k\beta\bar{s}$ при $R < R_0(\rho)$ по непрерывности $p(x)$ в точке x_0, то из (11) следует, что

$$\left(\oint_{B_r} w^{k(\beta-1)\bar{s}+p}dx\right)^{1/k} \le c(n,\mu,p)(1+\beta)^{s}\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{s} \oint_{B_r} w^{(\beta-1)\bar{s}+p}dx.$$

Полагая здесь $\beta = 1+\frac{\gamma}{\bar{s}}$, получим требуемое неравенство (10).Лемма доказана.

Теорема 1 [10]. Если выполнено условие (6), то решение $u(x)$ уравнения (1) ограничено в окрестности точки $x_0 \in D$. Обозначим через

$$M_4 = \sup_{B_{4R}} u(x), \quad m_4 = \inf_{B_{4R}} u(x). \qquad (12)$$

Следующее утверждение для функций

$$\upsilon(x) = \ln\frac{M_4 - m_4 + 2R}{M_4 - u(x) + R} \qquad (13)$$

является одним из основных в доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. Пусть $\upsilon(x) \ge 0$ является решением уравнения (1).Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{B_R} \upsilon(x) \le c\left(\oint_{B_{2R}} \upsilon^{\bar{s}}dx\right)^{1/\bar{s}}. \qquad (14)$$

Доказательство. Выбирая в интегральном тождество (3) пробную функцию

$$\varphi(x) = \frac{\upsilon^\beta}{(M_4 - u + R)^{\bar{s}-1}}\eta^s, \quad \beta \ge 1, \quad \eta \in C_0^\infty(B_R),$$

будем иметь

$$\beta\int_{B_{2R}} |\nabla u|^{p(x)}\upsilon^{\beta-1}(M_4-u+R)^{-\bar{s}}\eta^s dx \le s\int_{B_{2R}} |\nabla u|^{p(x)-1}\upsilon^{\beta}(M_4-u+R)^{1-\bar{s}}\eta^{s-1}|\nabla\eta|dx.$$

Поскольку $R^{p(x)-\bar{s}} \le const$, согласно логарифмическому условию (6), то после применения неравенства Юнга с соответствующим ε находим

$$\int_{B_{2R}} |\nabla u|^{p(x)}\upsilon^{\beta-1}\eta^s dx \le c(p,\mu)\int_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}dx.$$

Отсюда из неравенства (9) получаем

$$\int_{B_{2R}} |\nabla \upsilon|^{\bar{s}} \upsilon^{\beta-1} \eta^{S} dx \le c\left(\int_{B_{2R}} \upsilon^{\beta-1} \eta^{s} dx + \int_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right).$$

Так как $\eta^{s} \le \eta^{\frac{s}{\bar{s}}}$, то, применяя теорему вложения Соболева (7), приходим к неравенству

$$\left(\oint_{B_{2R}} \left(\upsilon^{p+\bar{s}-1} \eta^{s}\right)^{k} dx \right)^{1/k} \le C(\beta,\mu,p) R^{\bar{s}} \left(\oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \right.$$

$$\left. + \oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{\bar{s}} dx + \oint_{B_{2R}} \frac{\upsilon^{\beta+\bar{s}-1} \eta^{s}}{\upsilon^{\bar{s}}} dx \right).$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся тем, что $\upsilon(x) \ge CR$, поэтому

$$\left(\oint_{B_{2R}} \left(\upsilon^{\beta+\bar{s}-1} \eta^{s}\right)^{k} dx \right)^{1/k} \le C(\beta,\mu,p) R^{\bar{s}} \left(\oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + R^{-s} \oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} \eta^{s} dx \right).$$

Выбирая $\eta = 1$ в B_R, получим

$$\left(\oint_{B_R} \upsilon^{(\rho+\bar{s}-1)k} dx \right)^{1/k} \le c(\beta,\mu,p) \left(R^{\bar{s}} \oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \oint_{B_{2R}} \upsilon^{\beta+\bar{s}-1} dx \right). \quad (15)$$

Проитерируем это неравенство. Определим последовательность шаров B_{r_i}, $i = 0,1,2,\ldots$, с $r_i = R + 2^{-i} R$ и положим $\beta + \bar{s} - 1 = \chi_i = \bar{s} k^{i}$, где $k = \dfrac{n}{n-1}$ - константа из теоремы вложения Соболева. Применим неравенство (15), взяв срезающую функцию $\eta \in C_0^{\infty}\left(B_{r_i}\right)$, $\eta = 1$ в B_{r_i+1}, $|\nabla \eta| \le C \cdot 2^{i} R^{-1}$.

Если обозначить

$$\Phi_i = \Phi\left(\chi_i, B_{r_i}, \upsilon\right) = \left(\oint_{B_{r_i}} \upsilon^{\gamma_i} dx \right)^{1/\gamma_i},$$

то из (15) получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_{i+1} \le c^{1/\chi_i} \left(2^{i} \gamma_i\right)^{\bar{s}/\chi_i} \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^{\bar{s}/\chi_i} \Phi_i,$$

из которого следует требуемая оценка (14).

Теорема 2. Если $p(x)$ удовлетворяет в фиксированной точке $x_0 \in D$ условию (6), то оба решения (H - решение и V -решение) уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру в x_0.

Доказательство. Для непрерывности по Гёльдеру решения $u(x)$ уравнения (1) в точке x_0 достаточна установить, что при $0<\delta<1$ справедлива лемма об осцилляции

$$osc\{u;B_{R/4}\}\le(1-\delta)osc\{u;B_{4R}\}+R, \qquad (16)$$

где $osc\{u,B_R\}=\sup\limits_{B_R}u-\inf\limits_{B_R}u$. С этой целью рассмотрим два множества

$$F_1=\left\{x\in B_{2R}:u(x)\le\frac{M_4+m_4}{2}\right\},$$

$$F_2=\left\{x\in B_{2R}:M_4+m_4-u(x)\le\frac{M_4+m_4}{2}\right\}.$$

Всегда выполнено по крайней мере одно из двух неравенств

$$|F_1|\ge\frac{|B_{2R}|}{2} \qquad (17)$$

или

$$|F_2|\ge\frac{|B_{2R}|}{2}. \qquad (18)$$

Если из (17) для $u(x)$ следует оценка

$$\sup_{B_{R/4}}u(x)\le M_4-\delta\,osc\{u;B_{4R}\}+R,\ 0<\delta<1\ , \qquad (19)$$

то для функции $M_4+m_4-u(x)$ из (18) имеем

$$\sup_{B_{R/4}}(M_4+m_4-u(x))\le M_4-\delta\,osc\{u;B_{4R}\}+R \qquad (20)$$

и в обоих случаях приходим к (16). Без ограничения общности будем считать, что для решений $u(x)$ уравнения (1) выполнено неравенство (17). Для доказательства (16) достаточно показать, что функция υ, определенная в (13), удовлетворяет оценке

$$\sup_{B_{R/4}}\upsilon(x)\le C, \qquad (21)$$

с константой C, не зависящей от u и R. Вывод (21)основан на неравенстве

$$\int_{B_{2R}}|\nabla\upsilon|^{\bar{s}}dx\le CR^{n-\bar{s}}\ ,\ \ C=C(n,p,\mu), \qquad (22)$$

для доказательства которого выберем в интегральном тождестве (3) пробную функцию

$$\varphi(x)=\frac{\eta^s}{(M_4-u(x)+R)^{\bar{s}-1}},$$

где $\eta\in C_0^\infty(B_{3R})$, $\eta=1$ в B_{2R} , $|\nabla\eta|\le CR^{-1}$, а s и $\bar{s}$ определены в (8). Тогда

$$\int_{B_{3R}} (\bar{s}-1)|\nabla u|^{p(x)} \frac{\eta^s}{(M_4 - u(x) + R)^{\bar{s}}} dx \le \int_{B_{3R}} \frac{s|\nabla u|^{p(x)-1} \eta^{s-1} |\nabla \eta|}{(M_4 - u(x) + R)^{\bar{s}-1}} dx$$

и после применения неравенства Юнга с соответствующим ε приходим к оценке

$$\int_{B_{3R}} |\nabla \upsilon|^{p(x)} (M_4 - u(x) + R)^{p(x)-\bar{s}} \eta^s dx \le C(p) R^{n-\bar{s}} .$$

Так как по логарифмическому условию $(M_4 - u(x) + R)^{p-\bar{s}} \ge const,$ то, применяя неравенство (9), будем иметь

$$\int_{B_{2R}} |\nabla \upsilon|^{\bar{s}} dx \le CR^{n-\bar{s}} . \tag{23}$$

Для доказательства неравенства (16) заметим, что, в силу (17), $\upsilon(x) \le \ln 2$ на множестве F_1. Поэтому, по теореме вложения, с учетом (23), получаем

$$\int_{B_{2R} \setminus \{\upsilon \le \ln 2\}} |\upsilon - \ln 2|^{\bar{s}} dx \le CR^{\bar{s}} \int_{B_{2R}} |\nabla \upsilon|^{\bar{s}} dx \le CR^n .$$

Отсюда, согласно (14), следует требуемая оценка (21) .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Giorgi E. Slla differerenziabilita e lanaliticka delle estremali degli integrali multipli regolari Mem.Accad. Sci.Torino.Ci. Fis Mat. Natur., 1957, v.3, № 3, p.25-43.
2. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations/ Amer.J.Math. 1958, v.80, p. 931-954.
3. Moser J. On Harnack's teorem for elliptic differential equations / Commun. Pure and Appl. Math. 1961.v.14.p.577-591.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов /Тр.МИАН, 1964, т.73, с.172-220.
5. Serrin J. Local behavior of quasilinear elliptic equations /Acta.Math. 1964, v.111, p.247-302.
6. Жиков В.В. On some variational problems / Russ. J.Math. Phys.1996, v.5, №1, p.105-116.
7. Жиков В.В. Оценки типа Майерса для решения нелинейной системы Стокса /Дифференц. уравнения.1997, т.33, №1, с.107-114.
8. Жиков В.В. On Lavrentiev phenomenon / Russ.J. Math. Phys.1995, v.3, №2, p.249-269.
9. Алхутов Ю.А. Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных Эллиптических уравнений с нестандартным условием роста /Дифференц. уравнения. 1997, т.33, №12, с. 1651-1660.
10. Алхутов Ю.А. О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ – гармонических функций / Матем.сборник. 2005. т.196, №2, с.3-29.

QEYRİ-STANDART ARTIM ŞƏRTLİ ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN HÖLDER KƏSİLMƏZLİYİ

S.T.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

İşdə qeyri-standart artım şərtli elliptiк tənliкlərin həllərinə baxılır. Bundan əlavə həllin məhdudluğu haqqında teorem isbat olunur. Qeyd olunmuş nöqtədə bu tənliкlərin həllərinin daxili hamarlılığı isbat olunur. Fərz olunur кi, dəyişən üstlü funкsiya bu nöqtədə loqarifmiк кəsilməzliк moduluna maliкdir.

HOLDER CONTINUITY OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON-STANDARD GROWTH CONDITION

S.T.GUSEYNOV

SUMMARY

In the paper we study holder continuity of solutions of elliptic equations with non-standard growth condition. Besides, a theorem on boundedness of solutions has been proved. It is proved internal smoothness of solutions of the equation at a fixed point provided that a variable index at this point possesses a logarithmic continuity modulus